

Mirror alignment tolerance for 2-mirror and 4-mirror cavities

Y.Honda

2007/4/27

概要

Precise alignment of cavity mirrors is required if we try to realize a small spot size with a concentric 2-mirror cavity. 4-mirror ring cavity can reduce the sensitivity to the misalignment of the mirrors. We estimated the alignment tolerance using a simple model to quantitatively compare the two designs of cavity. It was confirmed that the sensitivity can be reduced about 2 orders of magnitude in the case of 4-mirror one.

1 はじめに

光学共振器内にスポットサイズを絞った安定解を実現したい場合、単純な2枚ミラーの構成(図1(a))では2枚の凹面ミラーを共心型に設計する必要がある。このタイプの共振器はミラーのミスアライメントによって光軸が大きく影響を受けてしまい取扱いが難しい。そこで、図1(b)の様に4枚のミラー(うち2枚は平面ミラー)を用いたリング型の共振器を考える。収束は凹面ミラー間で行い、その他の部分はほぼ平行光で伝搬させる遅延路である。(厳密には、凹面ミラーの入射角は垂直で無くなるために収差が生じるが、ここではその影響は無視できるとする。)この場合、共焦点型の構成になる為ミスアライメントの影響を受けにくくなると考えられる。

レーザーの波長 $\lambda = 1.064\mu\text{m}$ 、ビームウェスト $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ の共通の条件の下で2つのタイプの共振器のミスアライメントに対する感度を比較する。表1に今回計算を行った構成をまとめておく。

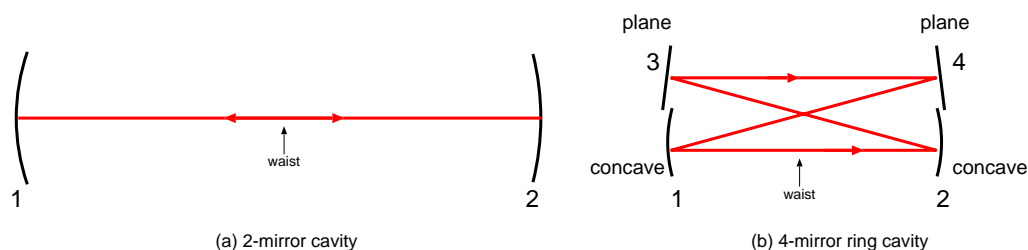


図 1: 共振器の構成

2 復習

計算に使用した公式等の簡単なメモ。

表 1: 比較する共振器

	共振器タイプ	1 周期の距離	要素間の距離
A	2 枚ミラー	0.21 m	0.105 m
B	2 枚ミラー	0.42 m	0.21 m
C	2 枚ミラー	0.84 m	0.42 m
D	4 枚ミラー リング型	0.84 m	0.21 m
E	4 枚ミラー リング型	1.68 m	0.42 m
F	4 枚ミラー リング型	3.36 m	0.84 m

2.1 光線の伝搬行列の復習

光学系の軸を基準として、そこを伝わる光線を軸からの位置 (r) と角度 ($r' = dr/dz$) を用いたベクトルで表記する。光学要素によって光線が $1 \rightarrow 2$ に変換される様子は

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と記述することが出来る。光学要素を表す ABCD 行列 (伝搬行列) は、ユニモジュラー ($AD - BC = 1$) であり、例えば長さ L の自由空間の場合は

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、焦点距離 f の薄レンズの場合は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

である。曲率半径 ρ の球面ミラーは $f = \rho/2$ の薄レンズと等価であり、平面ミラーは $\rho = \infty$ の場合に相当するので単位行列である。

光学要素が連続する場合は伝搬行列を次々に掛け算していけば全体の伝搬行列になる。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

2.2 ABCD 則の復習

任意の位置におけるガウシアンビームは、その波面の曲率半径 R とスポットサイズ ω と

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2} \quad (3)$$

なる関係をもつ複素数 q によって表現することができる。 q_1 がある光学要素 (行列 ABCD) の作用を受けると、式 4 に従って q_2 に変換される。

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (4)$$

3 共振器の設計

3.1 共振器の定常解の求め方

共振器に定常解が存在するという事は、共振器 1 周分の変換を受けたあと元の状態に戻るということなので、任意の位置を開始点とし共振器 1 周分について計算した伝搬行列について、式 4 を $q_1 = q_2 = q_s$ の条件で解けばよい。その解

$$\frac{1}{q_s} = \frac{D-A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{4-(D+A)^2}}{2B} \quad (5)$$

が 1 周の開始点に選んだ位置における定常解のビームを表現する。

つまり、波面の曲率半径は、

$$R = \frac{2B}{D-A} \quad (6)$$

スポットサイズは

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2|B|}{\sqrt{4-(D+A)^2}} \quad (7)$$

である。 $4-(D+A)^2 < 0$ の場合は定常解が存在しないことになる。

3.2 2 枚ミラーの場合

2 枚ミラー、ミラー間隔 l の共振器について凹面ミラーを焦点距離 f の薄レンズで置き換えて図 2 のようにモデル化する。

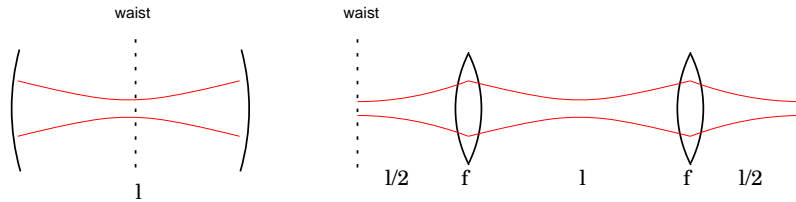


図 2: 2 枚ミラー共振器のモデル

共振器の中心を出発点として 1 周分の伝搬行列は以下のように計算される。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式 7 によって、共振器の中心でのスポットサイズ (ω_0) を計算することが出来る。例えば、波長 $\lambda=1.064\mu\text{m}$ 、ミラー間隔 $l=0.42\text{m}$ の場合 (表 1 C) に ω_0 を $f(= \rho/2)$ の関数としてプロットすると図 3 のようになる。 $4f < l$ ($2\rho < l$) の場合は定常解は存在しない。例えば $\omega_0=50\mu\text{m}$ にしたい場合は $f = 0.10513\text{m}$ (つまり曲率半径 $\rho = 0.21026\text{m}$) のミラーが必要である。この場合の共振器内のビームサイズの様子を図 4 に示す。

3.3 4 枚ミラーの場合

4 枚ミラーの場合も同様にモデル化し、図 5 のように考えることが出来る。

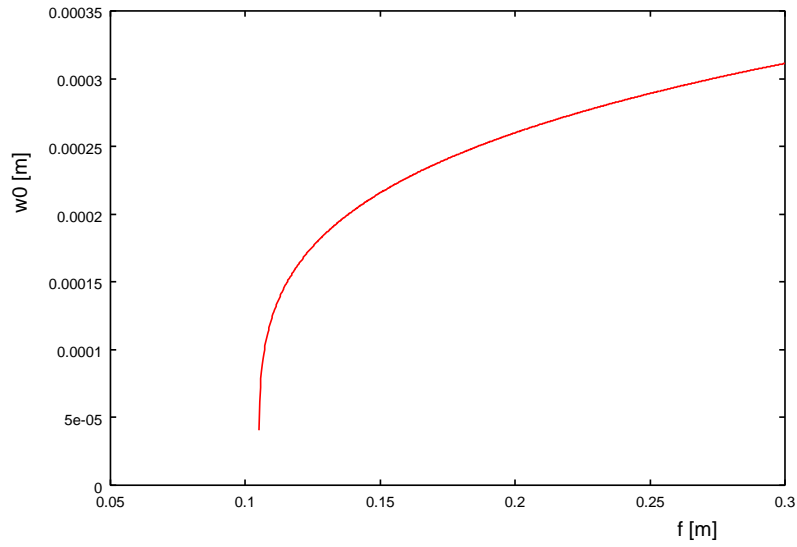


図 3: w_0 とミラーの焦点距離との関係 (C:2 枚ミラーの場合)

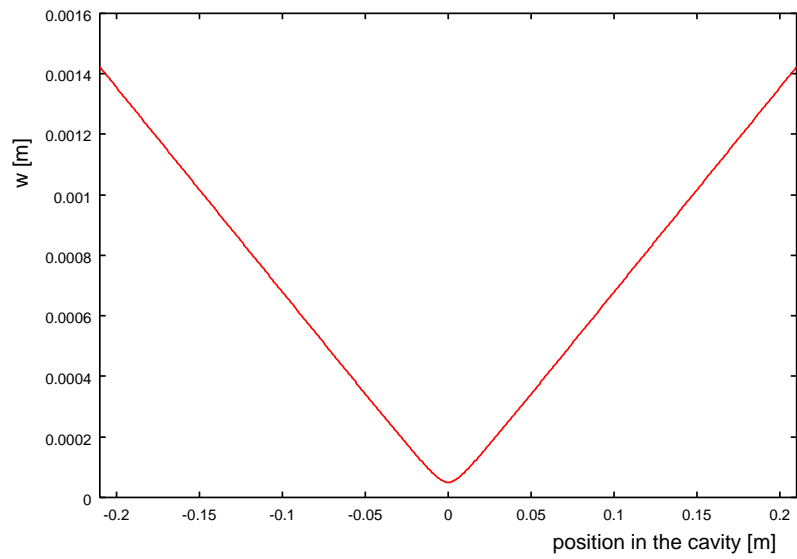


図 4: 共振器内でのビームサイズの様子 (C:2 枚ミラー、 $w_0 = 50\mu\text{m}$ の場合)

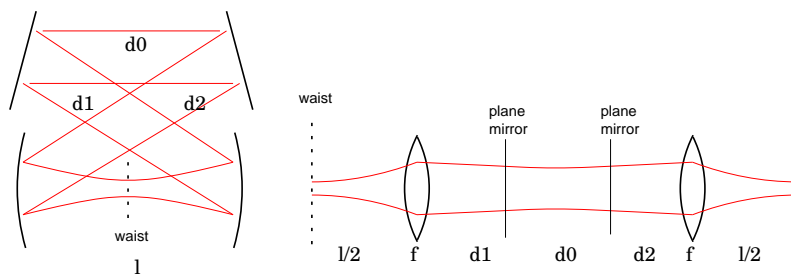


図 5: 4 枚ミラー共振器のモデル

ここでは凹面ミラーへの入射角が垂直に近くて収差が十分小さいという近似でミラーを薄レンズに置き換えた。平面ミラーは単に光路を折り返しているだけなので作用は単位行列である。凹面ミラー間の距離を l とし、それ以外の遅延路の長さを $d = d_1 + d_0 + d_2$ とすると、焦点の位置を出発点とした1周分の伝搬行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

例えば1周0.84mの場合、特に $l = d_1 = d_0 = d_2$ mの場合(表1 D)について具体的に計算することにする。図6に凹面ミラーの焦点距離と ω_0 の関係を示す。図中に示したようにいくつかのタイプの解があるが、今興味があるタイプ、即ち、凹面ミラー間で絞られ、遅延路でほぼ平行ビームになる場合は、図7に拡大した辺りである。 $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ にしたい場合は $f = 0.1039\text{m}$ (つまり曲率半径 $\rho = 0.2078\text{m}$) のミラーが必要である。

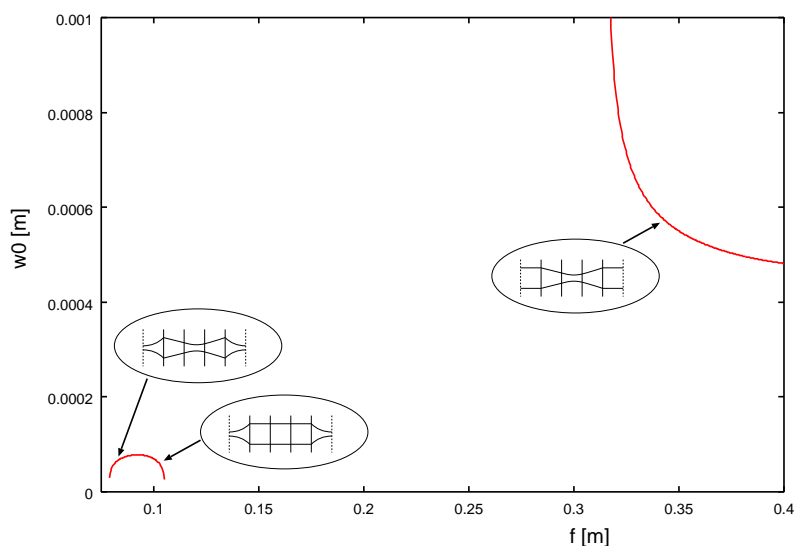


図6: ω_0 とミラーの焦点距離との関係(4枚ミラー、1周0.84mの場合)

この場合の共振器内のビームサイズを図8にプロットする。凹面ミラーの中心で $50\mu\text{m}$ に絞られ、遅延路では $700\mu\text{m}$ のほぼ平行ビームで伝搬する様子が確認出来る。

3.4 設計された共振器のまとめ

表1の各場合について、 $\lambda = 1.064\mu\text{m}$ 、 $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ を実現する興味のある解についてまとめたのが表2である。

4 ミスアライメントの影響の計算

全ての光学要素が完全にアライメントされていると、当然、共振器の定常解の光路は軸上になる。仮に図9のようにこの理想的なアライメントの軸に対して個々の光学要素がずれて配置された場合

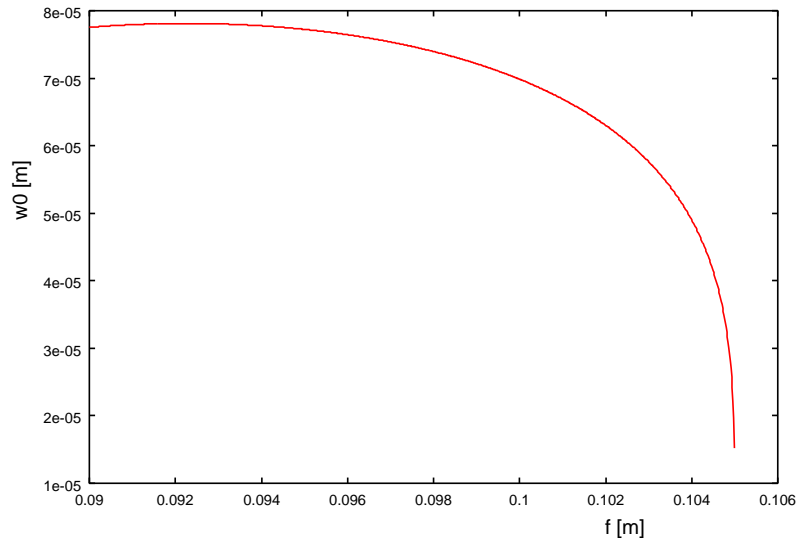


図 7: 図 6 の矢印付近の拡大

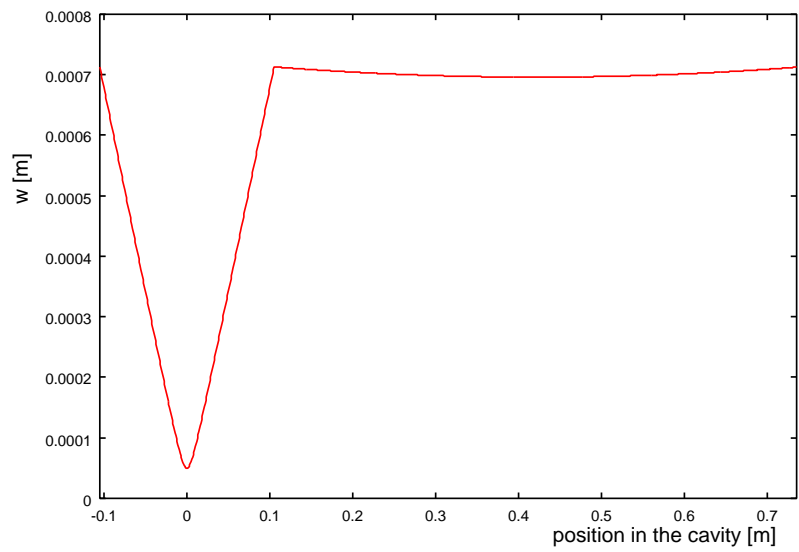


図 8: 共振器内でのビームサイズの様子 (4 枚ミラー、1 周 0.84m、 $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ の場合)

表 2: 設計された共振器

	$f (= \rho/2)$	凹面ミラー上での ω	遅延路の中心での ω
A	0.02675 m	0.359 mm	
B	0.05275 m	0.713 mm	
C	0.10513 m	0.1423 mm	
D	0.1039 m	0.713 mm	0.696 mm
E	0.20947 m	1.423 mm	1.415 mm
F	0.419173 m	2.845 mm	2.841 mm

に共振器の任意の位置における定常解の光路がどのような影響を受けるかについて考察する。この章の計算法は [1] による。

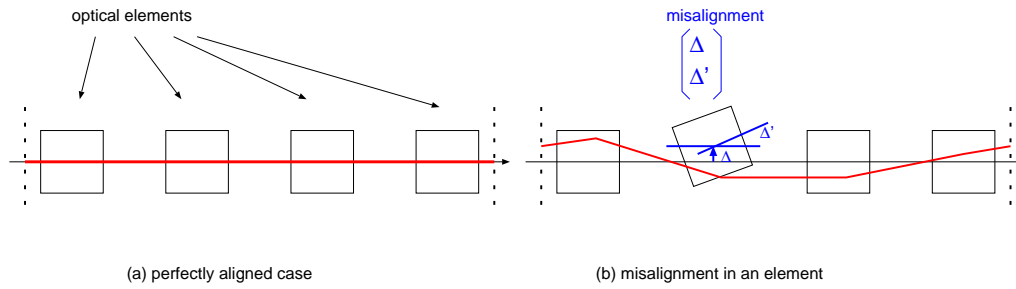


図 9: 光学要素のミスアライメント

4.1 ABCD 行列の拡張

ある要素が理想的な軸に対して位置 Δ 、角度 Δ' のずれがあるとする。この要素による光線の伝搬は式 1 を拡張して次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ABCD の部分行列は元の場合と同じであるが E, F の要素に Δ, Δ' の影響が取り入れられることになる。

例えば、薄レンズの場合は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & \Delta/f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

平面ミラーの場合は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\Delta' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることは少し考えると分かる。

凹面ミラーは薄レンズ + 平面ミラーと考えれば良いので

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/f & 1 & \Delta/f + 2\Delta' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

4.2 共振器の定常解の軌道への影響

構成要素にミスアラインがあった場合の定常解のビーム軌道は、共振器1周分の ABCDEF 伝搬行列から求めることができる。任意の位置における定常解のビーム軌道を具体的に計算するには、そこを出発点として1周分の伝搬行列を計算し、1周して元に戻る解、

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

つまり ABCDEF 行列の固有ベクトルを求めればよい。

式 11 を解くと、

$$r_0 = \frac{(1-D)E + BF}{2 - A - D} \quad (12)$$

$$r'_0 = \frac{CE + (1-A)F}{2 - A - D} \quad (13)$$

であることが分かり、伝搬行列さえ求めれば簡単に軌道のずれを計算することができる。

4.3 具体的な計算

凹面ミラーが高反射率を実現できる領域はその中心付近のみであると考えられるので、軌道のずれを考察するにあたって最も重要な位置は凹面ミラーであろう。そこで、凹面ミラー (1) を出発点にとった ABCDEF 行列を計算し、ミラー 1 での定常解の軌道を求める。それぞれのミラーに 1mm の位置のシフトあるいは 1mrad の角度シフトを与えた時にミラー 1 上でのビーム軌道位置及び軌道角度のずれを計算し、まとめたのが表 3~8 である。(この章でのミラーの呼び名は、図 1 中に示した 1~2、1~4 の番号に従う。) ミスアライメント 1mm あるいは 1mrad の場合だけを計算しているが、線形なモデルを用いているのでミスアライメントの大きさと結果は線形な関係を持つ。

表 3: A の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	25.7 mm	500 mrad
1 角度 (1 mrad)	1.38 mm	26.8 mrad
2 位置 (1 mm)	26.8 mm	500 mrad
2 角度 (1 mrad)	1.43 mm	26.8 mrad

2 枚ミラーの場合 (A,B,C) を比較すると、 $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ を保ったまま共振器長が長くなると急激に感度が上がってしまうことが分かる。4 枚ミラーの場合 (D,E,F) は 2 枚ミラーの場合と比較した 2 桁程度感度が下がっていることが分かる。また、共振器長が変わってもそれほど影響を受けない。

表 4: B の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	106 mm	1000 mrad
1 角度 (1 mrad)	11.0 mm	106 mrad
2 位置 (1 mm)	106 mm	1000 mrad
2 角度 (1 mrad)	11.1 mm	106 mrad

表 5: C の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	403 mm	1923 mrad
1 角度 (1 mrad)	85 mm	404 mrad
2 位置 (1 mm)	404 mm	1923 mrad
2 角度 (1 mrad)	85 mm	404 mrad

5 まとめ

2枚ミラーで構成した単純な共振器と4枚ミラーでリング型に構成した共振器についてミラーのミスアライメントに対して定常解の軌道が受ける影響の大きさを比較した。1周期0.84m、 $\lambda = 1.064\mu\text{m}$ 、 $\omega_0 = 50\mu\text{m}$ の条件の下で凹面ミラー上でのビーム位置の動きを計算したところ、4枚ミラー共振器にすると2桁程度感度が下がることが確認された。

参考文献

- [1] Siegman, 'LASERS'

表 6: D の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	1.07 mm	14.9 mrad
1 角度 (1 mrad)	0.22 mm	3.10 mrad
2 位置 (1 mm)	2.06 mm	14.9 mrad
2 角度 (1 mrad)	0.43 mm	3.10 mrad
3 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
3 角度 (1 mrad)	0.212 mm	1.03 mrad
4 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
4 角度 (1 mrad)	0.0045 mm	1.03 mrad

表 7: E の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	1.02 mm	7.22 mrad
1 角度 (1 mrad)	0.43 mm	3.02 mrad
2 位置 (1 mm)	2.02 mm	7.22 mrad
2 角度 (1 mrad)	0.84 mm	3.02 mrad
3 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
3 角度 (1 mrad)	0.42 mm	1.01 mrad
4 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
4 角度 (1 mrad)	0.0021 mm	1.01 mrad

表 8: F の場合の結果

要素のミスアライメント	1での軌道位置	1での軌道角度
1 位置 (1 mm)	1.01 mm	3.60 mrad
1 角度 (1 mrad)	0.85 mm	3.02 mrad
2 位置 (1 mm)	2.01 mm	3.60 mrad
2 角度 (1 mrad)	1.68 mm	6.62 mrad
3 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
3 角度 (1 mrad)	0.84 mm	1.01 mrad
4 位置 (1 mm)	0 mm	0 mrad
4 角度 (1 mrad)	0.0033 mm	1.01 mrad